

Elektro-optyczny efekt Kerra

dr Kamil Polok

(Wersja rozszerzona)

1 Wstęp

Efekt Kerra jest to proces nieliniowy 3 rzędu, polegający na zmianie współczynnika załamania światła przez przyłożone do ośrodka pole elektryczne. Może to być zarówno stacjonarne pole wytworzone na przykład w kondensatorze (elektro-optyczny efekt Kerra), jak i składowa elektryczna fali elektromagnetycznej (optyczno-optyczny efekt Kerra). Warto tu wspomnieć, że istnieje również magneto-optyczny efekt Kerra, w którym zmiana współczynnika załamania jest indukowana polem magnetycznym. Niniejsze ćwiczenie dotyczy elektro-optycznego efektu Kerra. Ponieważ wpływ pola elektrycznego na współczynnik załamania dla światła spolaryzowanego w kierunkach równoległym i prostopadłym do kierunku pola może się różnić, możliwe jest uzyskanie indukowanej dwójłomności (różnicy współczynników załamania dla różnych polaryzacji) w próbce początkowo izotropowej, a więc takiej, której właściwości są identyczne we wszystkich kierunkach.

Elektryczny efekt Kerra został odkryty w 1875 roku przez szkockiego fizyka Johna Kerra [1] i znalazł później zastosowanie w migawkach stosowanych na przykład w szybkiej fotografii. Czas przełączenia takiej migawki może wynosić zaledwie 1 ns. Migawka tego typu została wykorzystana w 1928 roku do pomiaru prędkości światła przez Karolusa i Mittelstaedta [2]. W pomiarze tym światło przechodziło przez migawkę kerrowską zawierającą dwusiarczek węgla (CS_2), otwieraną z częstotliwością ok. 20 MHz, a następnie odbijało się od lustra i wracało przez tę samą migawkę. Minimum intensywności światła powracającego uzyskiwano, gdy natrafiało ono na już zamkniętą migawkę. Uzyskany wtedy wynik to 299778 ± 20 km/s.

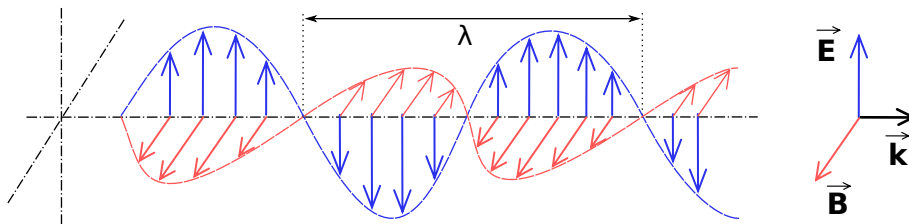
2 Teoria

W ćwiczeniu tym interesować nas będzie zmiana współczynnika załamania światła, a światło jest falą elektromagnetyczną, dlatego też skrypt ten zaczniemy od krótkiego omówienia tego typu fal.

2.1 Fala elektromagnetyczna i jej polaryzacja

Fala elektromagnetyczna składa się z drgającego wektora **natężenia pola elektrycznego** $\vec{E}$ oraz drgającego prostopadle do niego wektora **indukcji magnetycznej** $\vec{B}$. Fala taka rozchodząca się w **ośrodku izotropowym** jest opisana przez **równania falowe** dla składowej elektrycznej i magnetycznej w następującej postaci:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1a)$$



Rysunek 1: Fala elektromagnetyczna z zaznaczonymi wektorami $\vec{E}$, $\vec{B}$ i $\vec{k}$. Na rysunku zaznaczona została również długość fali λ [3].

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0, \quad (1b)$$

gdzie $\nabla^2 \vec{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{A} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \vec{A} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{A}$, zaś v jest prędkością rozchodzenia się fali w ośrodku. Wyprowadzenie równania (1a) można znaleźć w ramce 2.1. Składowe elektryczna i magnetyczna drgają w kierunkach prostopadłych do siebie i do kierunku propagacji fali, wskazywanego przez **wektor falowy** $\vec{k}$. Przykładowa fala elektromagnetyczna została zaprezentowana na rys. 1. Ponieważ dla zadanej składowej elektrycznej, można znaleźć odpowiadającą jej składową magnetyczną, w dalszej części tego skryptu składowa magnetyczna będzie pomijana. Rozwiązanie równania (1a) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi) \\ &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \phi), \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie $\omega = 2\pi\nu$ jest **częstością kołową**, a odpowiada jej **częstotliwość** ν , będąca odwrotnością **okresu drgania** T , czyli czasu 1 pełnej oscylacji. $\vec{k}$ jest wektorem falowym, a $\vec{r}$ wektorem wodzącym. Długość wektora falowego można znaleźć, podstawiając równanie (2) do (1a):

$$k = \frac{\omega}{v}. \quad (3)$$

Długość fali w ośrodku λ_{os} i jej czas pełnego drgania, czyli okres T są związane przez jej prędkość:

$$v = \frac{1}{T} \lambda_{os} = \nu \lambda_{os}. \quad (4)$$

Wyrażenie, będące argumentem cosinusa ($\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi$) nazywamy **fazą oscylacji**. Część ωt jest odpowiedzialna za oscylację wektora $\vec{E}$ widoczną gdy stoimy w miejscu, natomiast część $-\vec{k} \cdot \vec{r}$ jest odpowiedzialna za oscylację widoczną, gdy zatrzymamy czas i przemieszczamy się w kierunku propagacji fali. ϕ to faza oscylacji gdy jednocześnie $t = 0$ i $\vec{r} = 0$. Wygodnie jest założyć, że dla tej sytuacji nasza oscylacja osiąga maximum, wtedy $\phi = 0$. Jeśli dodatkowo nasza fala rozchodzi się w kierunku z , to równanie (2) upraszcza się do postaci:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k z). \quad (5)$$

Warto zauważyć, że jeśli mamy kilka rozwiązań równania (1a), to ich suma jest również rozwiązaniem tego równania.

Oscylacje można również zapisywać za pomocą liczb zespolonych. Skorzystajmy tutaj z poniższych zależności pomiędzy liczbą zespoloną $\tilde{z}$, a liczbą do niej sprzężoną $\tilde{z}^*$:

$$\tilde{z} = z_0 \cos \phi + i z_0 \sin \phi \quad (6a)$$

$$\tilde{z}^* = z_0 \cos \phi - i z_0 \sin \phi. \quad (6b)$$

Oscylację o amplitudzie z_0 i fazie ϕ możemy zapisać jako:

$$z_0 \cos \phi = \frac{1}{2}(\tilde{z} + \tilde{z}^*). \quad (7)$$

Skorzystamy teraz z zapisu liczby zespolonej w postaci wykładniczej:

$$\tilde{z} = z_0 e^{i\phi} \quad (8a)$$

$$\tilde{z}^* = z_0 e^{-i\phi} \quad (8b)$$

$$z_0 \cos \phi = \frac{1}{2} z_0 (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) = \frac{1}{2} z_0 e^{i\phi} + c.c., \quad (9)$$

gdzie *c.c.* jest skrótem od angielskiego wyrażenia *complex conjugate*, oznaczającego sprzężenie zespolone. W naszym przypadku *c.c.* = $\frac{1}{2} z_0 e^{-i\phi}$. Czyli zapisaliśmy naszą funkcję rzeczywistą cosinus jako sumę funkcji zespolonej i jej sprzężenia zespolonego. Tak więc nasze rozwiązanie równania falowego (1a), dane równaniem (2), możemy zapisać w postaci:

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)} + c.c.. \quad (10)$$

Mozna łatwo sprawdzić, że obie części powyższego równania (odpowiadające z i z^* w równaniu (7)) są niezależnie rozwiązaniami równania falowego (1a). Ponieważ postać sprzężenia zespolonego jest zawsze znana, wygodnie jest reprezentować naszą oscylację w postaci (8a):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)}. \quad (11)$$

W takim zapisie, aby uzyskać amplitudę i fazę drgania, bierzemy odpowiednio moduł i fazę z naszej liczby zespolonej. W tej konwencji w miejsce równania (5), otrzymujemy:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}. \quad (12)$$

Warto tutaj zwrócić uwagę, że zaniedbanie sprzężenia zespolonego nie zawsze jest słuszne. Tak jest np. w przypadku równania (86), gdy dochodzi do wymnażania funkcji opisujących oscylujące pola elektryczne. Przykładowo, w poniższym zapisie

$$\begin{aligned} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) &= \frac{1}{2} (e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) \frac{1}{2} (e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} + e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}) + \frac{1}{2} (e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + \frac{1}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t) \end{aligned} \quad (13)$$

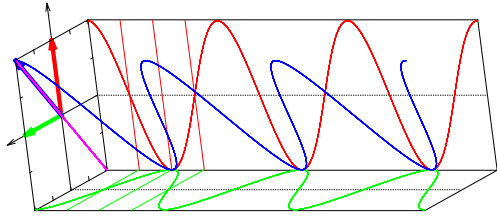
uzyskujemy człony odpowiadające sumie i różnicy częstości. Jeśli w powyższym wzorze funkcje składowe iloczynu $\cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)$ chcielibyśmy zapisać w postaci zespolonej z pominięciem części sprzężonych, to utracilibyśmy informację o członie odpowiadającym różnicy częstości $\cos((\omega_1 - \omega_2)t)$.

Polaryzacja światła opisuje sposób drgań pola $\vec{E}$. Dla uproszczenia wybieramy układ współrzędnych w taki sposób, aby kierunek propagacji fali odpowiadał osi z . W takiej sytuacji wektor pola $\vec{E}$ znajduje się w płaszczyźnie xy . Przypadek przedstawiony na rys. 1 dotyczy polaryzacji liniowej, czyli sytuacji, gdzie koniec wektora pola elektrycznego w płaszczyźnie xy kreśli linię prostą. Możliwe są jednak bardziej skomplikowane przypadki, gdzie wektor pola kreśli elipsę. $\vec{E}$ w płaszczyźnie xy można rozłożyć na składowe w kierunkach x i y , których jest sumą, $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j}$. Rozkład tego typu dla różnych polaryzacji liniowych jest przedstawiony na rysunkach 2a, 2f i 2j. Składowe $\vec{E}_x = E_x \vec{i}$ oraz $\vec{E}_y = E_y \vec{j}$ możemy traktować jako niezależne fale, spełniające równanie (1a). Składowe te mogą się różnić nie tylko amplitudą, ale i fazą:

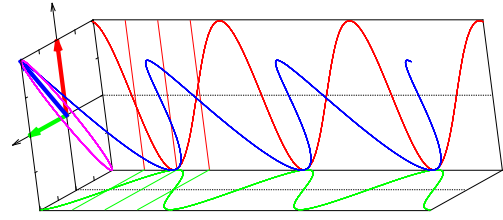
$$\vec{E}_x = E_{0,x} \cos(\omega t - kz + \Delta\phi) \vec{i} \quad (14a)$$

$$\vec{E}_y = E_{0,y} \cos(\omega t - kz) \vec{j}. \quad (14b)$$

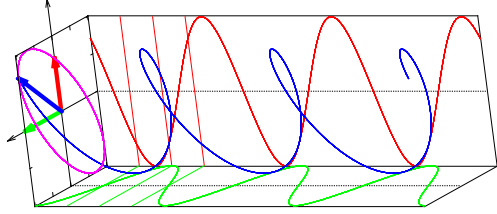
Rozważmy najpierw przypadek, kiedy $E_{0,y} = E_{0,x}$. Gdy różnica faz wynosi 0 lub π , otrzymujemy **polaryzację liniową**, dla $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{2}$ otrzymujemy **polaryzację kołową**, zaś w pozostałych przypadkach mamy do czynienia z **polaryzacją eliptyczną**. Rysunki 2a - 2h pokazują, co się dzieje, gdy zwiększamy przesunięcie fazowe. Widzimy, że początkowa polaryzacja liniowa przechodzi w eliptyczną, następnie w kołową, po czym staje się ponownie eliptyczną, lecz z zamienionymi kierunkami długiej i krótkiej osi, by następnie stać się polaryzacją liniową, prostopadłą do początkowej. Przy dalszym zwiększaniu fazy, ponownie pojawiają się polaryzacje eliptyczne i kołowe i dochodzimy do polaryzacji początkowej. Na wspomnianych rysunkach widzimy też, że dla polaryzacji eliptycznej lub kołowej wektor $\vec{E}$ kreśli w przestrzeni spiralę. Warto tu zwrócić uwagę, że dla różnicy faz z przedziału $(0; \pi)$, w miarę upływu czasu, w płaszczyźnie xy wektor $\vec{E}$ krąży zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (zgodnie z konwencją patrzymy w kierunku przeciwnym do kierunku propagacji światła, a więc w kierunku ujemnych wartości osi z), a więc mamy do czynienia z **polaryzacją kołową/eliptyczną prawoskrętną**. W przedziale $(\pi; 2\pi)$ mamy natomiast **polaryzację kołową/eliptyczną lewoskrętną** (porównaj np. rys. 2d i 2h). Rysunek 2i pokazuje, że polaryzację eliptyczną można też otrzymać dla przesunięcia fazowego $\frac{\pi}{2}$, jeśli dobierzemy różne amplitudy dla składowych w kierunkach x i y . W ogólności kierunek długiej osi elipsy można kontrolować poprzez odpowiedni dobór różnicy faz i stosunku amplitud dla kierunków x i y .



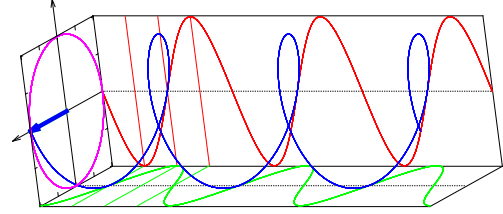
(a) $E_{0,y} = E_{0,x}$ $\Delta\phi = 0$



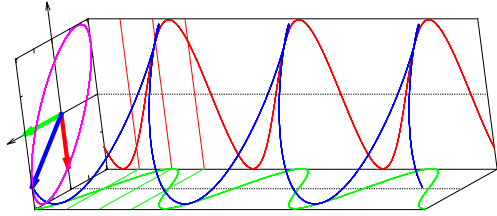
(b) $E_{0,y} = E_{0,x}$ $\Delta\phi = 0.05\pi$



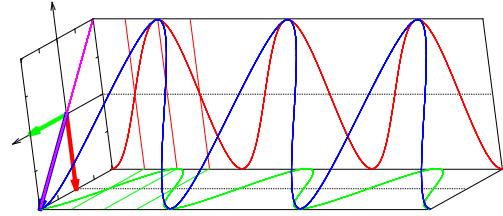
(c) $E_{0,y} = E_{0,x}$ $\Delta\phi = 0.25\pi$



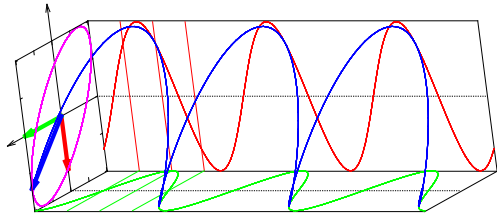
(d) $E_{0,y} = E_{0,x}$ $\Delta\phi = 0.5\pi$



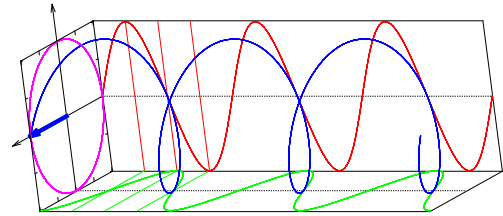
(e) $E_{0,y} = E_{0,x}$ $\Delta\phi = 0.75\pi$



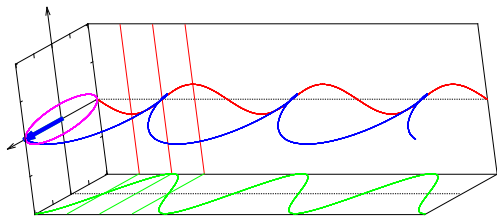
(f) $E_{0,y} = E_{0,x}$ $\Delta\phi = \pi$



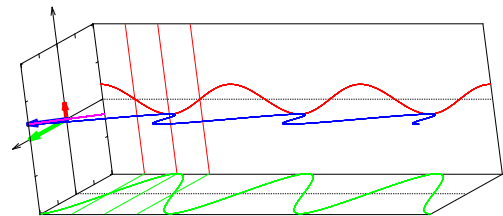
(g) $E_{0,y} = E_{0,x}$ $\Delta\phi = 1.25\pi$



(h) $E_{0,y} = E_{0,x}$ $\Delta\phi = 1.5\pi$



(i) $E_{0,y} = 0.2E_{0,x}$ $\Delta\phi = 0.5\pi$



(j) $E_{0,y} = 0.2E_{0,x}$ $\Delta\phi = 0$

Rysunek 2: Przykładowe polaryzacje fali elektromagnetycznej propagującej się w kierunku z . Krzywa niebieska odpowiada końcowi wektora $\vec{E}$, zaś krzywe fioletowa, czerwona i zielona są rzutami krzywej niebieskiej na płaszczyzny xy , xz i yz . Krzywe są prezentowane dla różnych opóźnień fazowych pomiędzy składowymi; (a-h) dla identycznych amplitud, (i, j) dla różnych amplitud. Ponadto w płaszczyźnie xy został przedstawiony rozkład wektora $\vec{E}$ na $\vec{E}_x = E_x \vec{i}$ oraz $\vec{E}_y = E_y \vec{j}$. **Uwaga:** W przeciwieństwie do rysunku 1, nie zaznaczono tu ewolucji wektora $\vec{B}$.

Wyprowadzenie współczynnika załamania z równań Maxwella

Równania Maxwella w postaci różniczkowej (przy założeniu izotropowości względnej przenikalności magnetycznej $\hat{\mu}$, wyprowadzenie można znaleźć w skrypcie do wykładu “Fizyka A”):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Prawo Indukcji Faradaya}) \quad (15)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \mu_0 \mu \vec{j} \quad (\text{Prawo Ampera}) \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{Prawo Gaussa}) \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Prawo Gaussa}). \quad (18)$$

Rozważamy ośrodek, w którym nie mamy ładunków swobodnych ($\rho = 0$) i przepływu prądu ($\vec{j} = 0$), dlatego też człony te zostały zaznaczone na szaro. Wektory $\vec{D}$ i $\vec{E}$ są związane następującą zależnością:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \hat{\epsilon} \vec{E}. \quad (19)$$

Na podstawie równań Maxwella można otrzymać równanie falowe zarówno dla pola elektrycznego, jak i magnetycznego. W tym skrypcie zostanie to wykonane dla pola elektrycznego. Działamy operatorem rotacji na obie strony równania (15):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (20)$$

Po prawej zamieniamy kolejność różniczkowania, zaś po lewej stronie korzystamy z właściwości iloczynu wektorowego $[A \times (B \times C) = B \cdot (A \cdot C) - (A \cdot B)C]$:

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}). \quad (21)$$

W kolejnych przekształceniach podstawiamy równania (16) i (19):

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) = \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (22)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \mu_0 \epsilon_0 \mu \hat{\epsilon} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (23)$$

Otrzymaliśmy równanie falowe, opisujące składową elektryczną fali elektromagnetycznej. W ośrodku izotropowym tensor $\hat{\epsilon}$ można zastąpić skalarem ϵ . Wtedy z równań (17) i (19) otrzymamy $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, a nasze równanie falowe przyjmie postać:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (24)$$

W próżni μ i ϵ są równe jedności:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (25)$$

2.2 Współczynnik załamania światła w ośrodku izotropowym

Współczynnik załamania światła jest wielkością informującą o stosunku prędkości światła w próżni do jego prędkości w danym ośrodku:

$$n = \frac{c}{v} \quad (26)$$

Porównując równania falowe wyprowadzone w ramce 2.1 dla ośrodka izotropowego i próżni (równ. (24) i (25)) z równaniem falowym zapisanym w postaci (1a), otrzymujemy:

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \epsilon_0 \mu \epsilon \quad \frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0. \quad (27)$$

gdzie ϵ_0 – **przenikalność elektryczna próżni**, μ_0 – **przenikalność magnetyczna próżni**, ϵ – **względna przenikalność elektryczna ośrodka**, μ – **względna przenikalność magnetyczna ośrodka**. Otrzymujemy więc następujące wzory na prędkość światła w próżni c i współczynnik załamania n :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (28)$$

$$n = \sqrt{\epsilon \mu} \approx \sqrt{\epsilon}, \quad (29)$$

gdzie w ostatnim wzorze zostało założone, że w rozważanych ośrodkach $\mu \approx 1$. Z równań (3) i (26) widzimy, że wektor falowy zależy od współczynnika załamania:

$$k = \frac{n\omega}{c} = nk_0. \quad (30)$$

W powietrzu, ponieważ $n \approx 1$, często przyjmuje się $k = k_0$, gdzie k_0 to wektor falowy w próżni.

Rozważmy teraz falę elektromagnetyczną propagującą się w kierunku z , przechodzącą przez ośrodek o grubości d i współczynniku załamania n , zaczynającą się w pozycji z_0 . Na wejściu do ośrodka pole elektryczne możemy zapisać jako:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_0 z_0)}. \quad (31)$$

Na wyjściu z ośrodka fala ma postać:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_0 z_0 - nk_0 d)}. \quad (32)$$

Gdyby na drodze d znajdowało się powietrze, fala na wyjściu miałaby inną fazę:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_0(z_0 + d))}. \quad (33)$$

2.3 Współczynnik załamania światła w ośrodku anizotropowym

Wyobraźmy sobie teraz sytuację, gdzie nasz ośrodek nie jest izotropowy i posiada dwa różne współczynniki załamania dla fali spolaryzowanej liniowo w kierunku x i dla fali spolaryzowanej liniowo w kierunku y , odpowiednio n_x i n_y . W takiej sytuacji składowe $\vec{E}$ odpowiadające kierunkom x oraz y musimy rozważać jako dwie spolaryzowane liniowo fale, poruszające się w ośrodku niezależnie. Załóżmy teraz, że nasza fala jest spolaryzowana liniowo, jak na rysunku 2a. Składowe w kierunkach x i y przed wejściem do naszego ośrodka mają taką samą fazę:

$$\vec{E}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{i(\omega t - k_0 z_0)} \vec{i} \quad (34)$$

$$\vec{E}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{i(\omega t - k_0 z_0)} \vec{j}, \quad (35)$$

jednak po przejściu przez ośrodek będą już miały różne fazy, gdyż poruszają się one w nim z różnymi prędkościami:

$$\vec{E}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{i(\omega t - k_0 z_0 - n_x k_0 d)} \vec{i} \quad (36)$$

$$\vec{E}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{i(\omega t - k_0 z_0 - n_y k_0 d)} \vec{j} \quad (37)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{i(\omega t - k_0 z_0 - n_x k_0 d - \Delta n k_0 d)} \vec{j}, \quad (38)$$

gdzie różnica faz $\Delta\phi = \Delta n k_0 d$ jest zależna od grubości ośrodka d i różnicy współczynników załamania $\Delta n = n_x - n_y$. Gdy $\Delta\phi$ jest różne od wielokrotności 2π , po zsumowaniu składowych na wyjściu z ośrodka otrzymamy polaryzację różną od wejściowej.

Ośrodki wykazujące więcej niż jedną możliwą wartość współczynnika załamania w zależności od kierunku polaryzacji światła nazywamy **dwójłomnymi**. Najprostszym takim ośrodkiem jest ośrodek dwójłomny **jednoosiowy**, gdzie mamy do czynienia z dwoma współczynnikami załamania, oznaczanymi n_o (ang. *ordinary*, czyli **zwyczajny**) i n_e (ang. *extraordinary*, czyli **nadzwyczajny**). W ośrodku takim istnieje pewien wyróżniony kierunek, zwany **osią optyczną**. Dla światła poruszającego się w kierunku osi optycznej współczynnik załamania nie zależy od polaryzacji światła i wynosi n_o . Dla światła poruszającego się w kierunku prostopadłym do osi optycznej, mamy dwie możliwe wartości współczynnika załamania. Współczynnik załamania n_e odpowiada światłu spolaryzowanemu w kierunku osi optycznej, zaś n_o światłu spolaryzowanemu prostopadłe do niej. Dla światła propagującego się w kierunku innym niż prostopadły bądź równoległy do osi optycznej, sytuacja jest bardziej złożona. Informacje na ten temat osoby bardziej zainteresowane tematem znajdą w ramce 2.2. Kryształy dwójłomne są powszechnie wykorzystywane do produkcji elementów optycznych takich, jak polaryzatory, czy płytki falowe.

2.3.1 Płytką falowa

Płytką falową w najprostszej postaci jest kryształem dwójłomnym jednoosiowym z osią optyczną w płaszczyźnie płytki i odpowiednio dobraną grubością. Na rysunku 3a została przedstawiona płytka falowa złożona z dwóch takich kryształów. Płytką wprowadzającą różnicę faz $\Delta\phi = \pi$ jest nazywana **półfalówką** (przesunięcie fazy odpowiadające połowie długości fali), zaś płytka dla której $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ to **ćwierćfalówka** (przesunięcie fazy odpowiadające 1/2 długości fali). Obracając płytkę falową w jej płaszczyźnie, obracamy układ współrzędnych, w którym rozkładamy naszą falę wejściową na składowe propagujące się z różnymi prędkościami (zmieniamy kierunki, którym odpowiadają współczynniki załamania n_o i n_e). Płytką półfalową powoduje obrót polaryzacji, zaś płytka ćwierćfalowa pozwala na zmianę polaryzacji z liniowej na eliptyczną (kołową, gdy oś optyczna tworzy 45° z kierunkiem polaryzacji fali padającej) i z powrotem. Zastanowienie się jak zmienia się polaryzacja w zależności od kąta pomiędzy kierunkiem polaryzacji światła padającego a kierunkiem osi optycznej jest dobrym ćwiczeniem pozwalającym na sprawdzenie zrozumienia prezentowanego materiału.

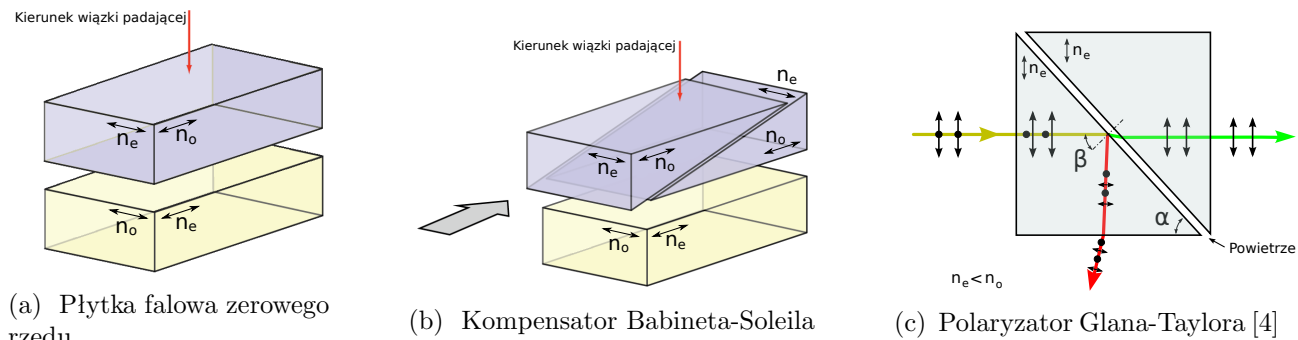
Płytką falową zapewniającą opóźnienie $\Delta\phi < 2\pi$, czyli tak zwana **płytką falową zerowego rzędu**, jest bardzo cienka, a więc i trudna w produkcji i łatwo ją uszkodzić, czy zdeformować podczas montażu. Przykładowo dla kalcytu (CaCO_3) dla długości fali $\lambda = 800 \text{ nm}$ $n_o = 1.6488$, $n_e = 1.4819$, więc odpowiadająca grubość ćwierćfalówki zerowego rzędu to zaledwie:

$$d = \frac{\frac{1}{2}\pi}{(n_o - n_e)\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{1}{4} \frac{\lambda}{n_o - n_e} \approx 1.2 \text{ } \mu\text{m}. \quad (39)$$

Teoretycznie można skorzystać z faktu, że ten sam efekt uzyskamy dla dużo grubszej płytki o opóźnieniu $n2\pi + \Delta\phi$. Niestety, im większa wielokrotność 2π , tym wartość opóźnienia w takiej płytce jest bardziej wrażliwa na odchylenia kierunku propagacji wiązki od prostopadłego do płytki. Problem ten można jednak rozwiązać stosując parę grubszych płytek obroconych względem siebie o 90° , a więc po przejściu z jednej płytki do drugiej, zamianie ulegają kierunki polaryzacji, którym odpowiadają współczynniki załamania n_o i n_e . W takim układzie różnica faz nabyta w pierwszej płytce, będzie zmniejszona w drugiej płytce do wartości $\Delta\phi$. A więc płytkę zerowego rzędu otrzymujemy z połączenia odpowiednio dobranych dwóch płytek wyższego rzędu.

2.3.2 Kompensator Babineta-Soleila

Kompensator Babineta-Soleila jest w praktyce płytką falową o regulowanym opóźnieniu. Jego schemat został przedstawiony na rys. 3b. Jest on podobny do płytki falowej zerowego rzędu zbudowanej z dwóch płytek falowych wyższego rzędu, przy czym jedna z płytek jest zbudowana z 2 klinów. Przesuwając jeden z klinów można płynnie zmieniać grubość tej płytki, a więc kontrolować opóźnienie fazowe. Jak sama nazwa wskazuje, można go również użyć do kompensacji opóźnienia wprowadzonego przez inny element.



Rysunek 3: Schematy budowy urządzeń optycznych

2.3.3 Polaryzator Glana-Taylora

Polaryzator Glana-Taylora składa się z pary pryzmatów wykonanych z kryształu dwójłomnego jednoosiowego, z kierunkiem osi optycznej, jak na rysunku 3c. Zasada działania takiego polaryzatora opiera się na zjawisku całkowitego wewnętrznego odbicia. Kąt nachylenia szczeliny powietrznej α w polaryzatorze jest tak dobrany, żeby warunek całkowitego wewnętrznego odbicia był spełniony tylko dla polaryzacji, której odpowiada wyższy współczynnik załamania. Dla przypomnienia, całkowite wewnętrzne odbicie ma miejsce, gdy światło propagujące się w ośrodku o większym współczynniku załamania trafia na granicę z ośrodkiem o mniejszym współczynniku załamania, a kąt padania na tę granicę (β) jest większy od **kąta granicznego**. W naszym przypadku wartość kąta granicznego jest różna dla obu polaryzacji i jej sinus wynosi:

$$\sin \beta_o = \frac{n_p}{n_o} \quad (40)$$

$$\sin \beta_e = \frac{n_p}{n_e}, \quad (41)$$

gdzie $n_p \approx 1$ jest współczynnikiem załamania światła dla powietrza. Więcej informacji o kącie granicznym można znaleźć w skrypcie do ćwiczenia O1.

Propagacja fali w ośrodku anizotropowym

Rozważmy równanie (23) w układzie współrzędnych odpowiadającym diagonalnej macierzy tensora $\hat{\epsilon}$. Wykonując różniczkowania, otrzymujemy:

$$\left(k^2 - k_x^2 - n_x^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_x - k_x k_y E_y - k_x k_z E_z = 0 \quad (42)$$

$$-k_y k_x E_x + \left(k^2 - k_y^2 - n_y^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_y - k_y k_z E_z = 0 \quad (43)$$

$$-k_z k_x E_x - k_z k_y E_y + \left(k^2 - k_z^2 - n_z^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_z = 0. \quad (44)$$

W naszych rozważaniach skupimy się na prostszym przypadku kryształu jednoosiowego, a więc takiego, gdzie 2 współczynniki załamania są równe. Załóżmy więc $n_x = n_e$, $n_y = n_z = n_o$. Ponieważ w takiej sytuacji obrót wokół kierunku x nic nie zmienia, możemy wybrać układ współrzędnych, w którym $k_y = 0$. Wtedy mamy:

$$(k_z^2 - n_e^2 k_0^2) E_x - k_x k_z E_z = 0 \quad (45)$$

$$(k^2 - n_o^2 k_0^2) E_y = 0 \quad (46)$$

$$-k_z k_x E_x + (k_x^2 - n_o^2 k_0^2) E_z = 0. \quad (47)$$

Widzimy, że dla równania (46) mamy 2 możliwe rozwiązania:

Rozwiązanie 1

$$k^2 - n_o^2 k_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad k = n_o k_0 \quad (48)$$

Na podstawie pozostałych równań dostajemy 2 przypadki:

Jeśli $k_z = 0$, to $E_x = 0$, zaś E_y i E_z są dowolne. Czyli dla fali propagującej się w kierunku osi optycznej, mamy współczynnik załamania n_o , niezależnie od polaryzacji fali.

Jeśli $k_z \neq 0$, to $E_z = E_x = 0$, czyli dla fali spolaryzowanej w kierunku y mamy współczynnik załamania n_o .

Rozwiązanie 2

Gdy $E_y = 0$, to z równań (45) i (47) mamy:

$$\frac{k_x^2}{n_o^2 k_0^2} + \frac{k_z^2}{n_e^2 k_0^2} = 1 \quad E_x = -\frac{n_o^2 k_z}{n_e^2 k_x} E_z. \quad (49)$$

Widzimy więc, że dla fali spolaryzowanej w płaszczyźnie xz długość wektora $\vec{k}$ zależy od kierunku propagacji i jest zdefiniowana przez elipsę o osiach długości $n_e k_0$ i $n_o k_0$. W takim razie mamy współczynnik załamania $n(\theta)$, zależny od kąta pomiędzy wektorem falowym, a osią optyczną i przyjmuje on wartości w zakresie od n_e do n_o . Współczynnik załamania można więc zobrazować elipsoidą.

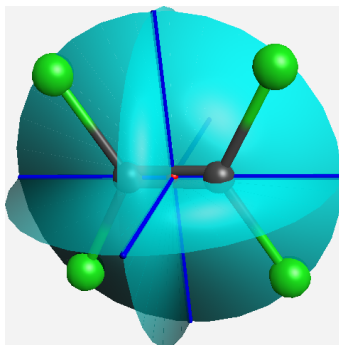
Na podstawie powyższego widzimy, że w szczególnym przypadku propagacji w kierunku prostopadłym do osi optycznej, mamy 2 fale o wzajemnie prostopadłych polaryzacjach i różnych prędkościach propagacji określonych przez współczynniki załamania n_e i n_o .

Uwaga: Poza pewnymi szczególnymi przypadkami, światło wpadające do ośrodka dwójłomnego ulega podwójnemu załamaniu i składowe o polaryzacjach w kierunku y i w płaszczyźnie xz rozchodzą się w innych kierunkach. Efekt podwójnego załamania został zobrazowany na załączonej fotografii.



2.4 Opis tensorowy właściwości anizotropowych na przykładzie polaryzowalności

Właściwości ośrodka izotropowego (np. ściśliwość, względna przenikalność elektryczna, podatność elektryczna, przewodnictwo cieplne, prędkość dźwięku) nie zależą od kierunku i można je opisać za pomocą skalarów. Kiedy jednak mamy do czynienia z ośrodkami anizotropowymi, przy rozważaniu danej właściwości konieczne jest uwzględnienie kierunku, czemu właśnie służą **tensory**. Podobnie jest w przypadku obiektów takich, jak cząsteczki. Jeśli cząsteczka ma odpowiednio wysoką symetrię, to jej właściwości, takie jak np. polaryzowalność, czy moment bezwładności, nie zależą od wyboru układu współrzędnych i mogą być opisane za pomocą skalarów. W przypadku cząsteczek o niższej symetrii konieczne jest użycie zapisu tensorowego. Anizotropia makroskopowych właściwości ośrodka wynika z anizotropii właściwości cząsteczek i ich organizacji w ośrodku. W naszym przypadku anizotropia współczynnika załamania jest związana z anizotropią polaryzowalności cząsteczek.



Rysunek 4: Cząsteczka C_2Cl_4 i jej elementy symetrii. Niebieskie linie oznaczają osie symetrii, odpowiadające obrotowi o 180° , jasnoniebieskie płaszczyzny to płaszczyzny symetrii, a czerwona kropka to środek inwersji.

Polaryzowalność cząsteczki opisuje zależność momentu dipolowego indukowanego $\vec{\mu}_{\text{ind}}$ w cząsteczce od wielkości i kierunku przyłożenia pola elektrycznego $\vec{E}$:

$$\vec{\mu}_{\text{ind}} = \hat{\alpha} \vec{E}, \quad (50)$$

gdzie $\hat{\alpha}$ jest **tensorem polaryzowalności**. Dla przykładu rozważmy cząsteczkę C_2Cl_4 , przedstawioną na rysunku 4. Cząsteczka ta posiada 3 płaszczyzny symetrii i 3 osie symetrii, zaznaczone na rysunku. Obrót cząsteczki wokół każdej z osi symetrii o 180° daje ten sam obraz cząsteczki. Osie te wyznaczają pewien układ współrzędnych, związany z cząsteczką. Jeśli naszą cząsteczkę wstawimy w pole elektryczne skierowane wzdłuż jednej z jej osi symetrii, to wyindukowany moment dipolowy będzie skierowany wzdłuż tej samej osi. Wynika to z symetrii, co teraz sobie pokażemy. Załóżmy, że przykładamy pole w kierunku wiązania C=C naszej cząsteczki. Widzimy, że układ cząsteczka + pole ma wtedy jedną oś symetrii, która to jest równoległa do pola oraz kierunku wiązania C=C. Jeśli nasz układ obrócimy o 180° wokół tej osi, to będzie on wyglądał identycznie, jak przed obrotem. Gdyby nasz wyindukowany moment dipolowy nie był równoległy do kierunku pola, to można by go rozłożyć na składowe równoległą i prostopadłą do kierunku pola. Składowa równoległa po wspomnianym wcześniej obrocie wygląda tak samo, natomiast składowa prostopadła zmienia zwrot na przeciwny. Oznacza to, że nie spełnia ona właściwości symetrii naszego układu cząsteczka + pole, a więc musi być równa zero. Można też na ten problem spojrzeć w ten sposób, że aby zachować symetrię układu, dla składowej momentu dipolowego w kierunku prostopadłym do kierunku pola, musi istnieć odpowiadająca jej składowa o przeciwnym zwrocie, ale wtedy ich suma daje zero i pozostaje nam tylko składowa równoległa do kierunku pola. Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla pola skierowanego wzdłuż pozostałych osi symetrii cząsteczki. A co jeśli pole nie jest równoległe do osi symetrii cząsteczki? Wtedy układ cząsteczka + pole nie posiada osi obrotu wzdłuż kierunku pola i indukowany moment dipolowy może mieć składową prostopadłą do kierunku pola. Ze względu na budowę naszej cząsteczki, możemy oczekiwać, że łatwość przesunięcia chmury elektronowej przez pole elektryczne w kierunkach każdej z osi symetrii będzie różna. Faktycznie, największą polaryzowalność mamy w kierunku wiązania podwójnego C=C, zaś najmniejszą w kierunku prostopadłym do płaszczyzny cząsteczki.

Wybermy nasz układ współrzędnych zgodnie z osiami symetrii cząsteczki, w ten sposób, że oś z jest prostopadła do płaszczyzny cząsteczki, zaś oś x jest równoległa do wiązania C=C. Ponieważ

dla pola przyłożonego w kierunku jednej z osi symetrii, indukowany moment dipolowy jest do niego równoległy, polaryzowalność wzdłuż osi x , y i z możemy opisać skalarami α_{xx} , α_{yy} i α_{zz} :

$$\vec{\mu}_{\text{ind},x} = \alpha_{xx} \vec{E}_x \quad (51a)$$

$$\vec{\mu}_{\text{ind},y} = \alpha_{yy} \vec{E}_y \quad (51b)$$

$$\vec{\mu}_{\text{ind},z} = \alpha_{zz} \vec{E}_z. \quad (51c)$$

W przypadku, gdy kierunek naszego pola nie pokrywa się z żadną z osi symetrii cząsteczki, możemy nasze pole rozłożyć na składowe wzdłuż tych osi, a wyindukowany moment dipolowy jest wtedy sumą momentów wyindukowanych przez składowe pola:

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z \quad (52)$$

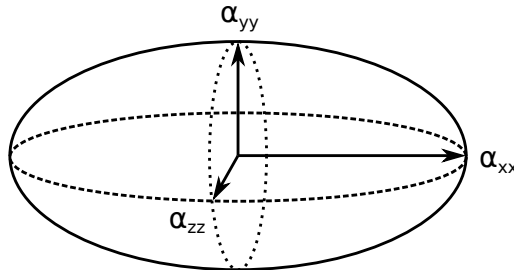
$$\begin{aligned} \vec{\mu}_{\text{ind}} &= \vec{\mu}_{\text{ind},x} + \vec{\mu}_{\text{ind},y} + \vec{\mu}_{\text{ind},z} = \\ &= \alpha_{xx} \vec{E}_x + \alpha_{yy} \vec{E}_y + \alpha_{zz} \vec{E}_z \\ &= \alpha_{xx} E_x \vec{i} + \alpha_{yy} E_y \vec{j} + \alpha_{zz} E_z \vec{k}. \end{aligned} \quad (53)$$

Patrząc na postać równania (53), można zauważyć, że indukowany moment dipolowy $\vec{\mu}_{\text{ind}}$ możemy zapisać jako iloczyn macierzy diagonalnej i wektora pola elektrycznego. Wygodnie jest tutaj skorzystać z kolumnowego zapisu wektorów:

$$\vec{\mu}_{\text{ind}} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} E_x \\ \alpha_{yy} E_y \\ \alpha_{zz} E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \hat{\alpha} \vec{E}, \quad (54)$$

gdzie macierz diagonalna reprezentuje **tensor polaryzowalności**.

Uwaga: Tensor jest zapisywany z daszkiem, zaś jego składowe, czyli elementy powyższej macierzy są już skalarami, więc daszka nie mają.



Rysunek 5: Reprezentacja tensora polaryzowalności $\hat{\alpha}$ za pomocą elipsoidy polaryzowalności. Wartości własne tensora znajdują się na jej osiach.

Nasz tensor polaryzowalności $\hat{\alpha}$ możemy też przedstawić graficznie jako elipsoidę polaryzowalności, co zostało przedstawione na rys. 5. Kierunki osi elipsoidy odpowiadają kierunkom, dla których wektor indukowanego momentu dipolowego jest równoległy do pola, zaś długości półosi odpowiadają wartościom polaryzowalności dla tych kierunków. Taką elipsoidę można znaleźć dla każdej cząsteczki, jednak w przypadku cząsteczek nie posiadających elementów symetrii, orientacja takiej elipsoidy względem cząsteczki jest mało intuicyjna. W przypadku cząsteczki C_2Cl_4 znalezienie osi elipsoidy polaryzowalności było proste ze względu na obecność osi symetrii. Diagonalna postać macierzy tensora $\hat{\alpha}$ odpowiada pewnemu szczególnemu układowi współrzędnych związanemu z cząsteczką. W tym układzie współrzędnych wektory wzdłuż osi x , y lub z są **wektorami własnymi** tensora $\hat{\alpha}$, zaś wartości na diagonalu są odpowiednimi **wartościami własnymi** tych wektorów. **Wektor własny**, jest to taki wektor, który po przemnożeniu przez macierz naszego tensora daje zawsze ten sam wektor przemnożony przez odpowiadającą mu **wartość własną**. Widzimy więc, że kierunki osi elipsoidy odpowiadają kierunkom wektorów własnych, zaś długości półosi odpowiadają wartościom własnym. Rozważmy teraz dwa przykłady w układzie współrzędnych odpowiadającym osiom elipsoidy polaryzowalności (a

więc wyznaczonym przez kierunki wektorów własnych), gdzie wszystkie wartości własne są różne:

$$\vec{\mu}_{\text{ind}} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} E_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_{xx} \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mu} \parallel \vec{E} \quad (55a)$$

$$\vec{\mu}_{\text{ind}} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_{yy} E_y \\ \alpha_{zz} E_z \end{bmatrix}, \quad \vec{\mu} \nparallel \vec{E}. \quad (55b)$$

W równaniu (55a) mamy wektor pola elektrycznego, który jest wektorem własnym i otrzymany wektor indukowanego momentu dipolowego jest do niego równoległy (jest to wartość własna α_{xx} razy $\vec{E}$). Inaczej jest w równaniu (55b), gdzie wektor pola nie jest już wektorem własnym i otrzymany indukowany moment dipolowy nie jest do niego równoległy. Widzimy więc, że indukowany moment dipolowy będzie równoległy do pola tylko wtedy gdy cząsteczka będzie ustawiona którąś z osi elipsoidy w kierunku pola.

Elipsoida polaryzowalności jest związana z cząsteczką i obraca się razem z nią, a co za tym idzie obraca się również układ współrzędnych, w którym macierz tensora $\hat{\alpha}$ jest diagonalna. Zazwyczaj w sytuacji, gdy rozważamy pewien zbiór cząsteczek o różnych orientacjach, chcemy ich tensory polaryzowalności wyrazić we wspólnym laboratoryjnym układzie współrzędnych. Postać macierzy tensora $\hat{\alpha}$ zależy od wyboru układu współrzędnych i w ogólnym przypadku ma postać:

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{x'x'} & \alpha_{x'y'} & \alpha_{x'z'} \\ \alpha_{y'x'} & \alpha_{y'y'} & \alpha_{y'z'} \\ \alpha_{z'x'} & \alpha_{z'y'} & \alpha_{z'z'} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

gdzie macierze $\hat{\alpha}$ w układach xyz i $x'y'z'$ są związane ze sobą przez macierze obrotu. Poza szczególnymi przypadkami człony diagonalne w obu układach współrzędnych są różne.

Rozważmy teraz cząsteczkę liniową, jak np. dwutlenek węgla (CO_2). Dla takiej cząsteczki mamy tylko 2 różne wartości własne tensora polaryzowalności, jedną odpowiadającą kierunkowi osi cząsteczki $\alpha_{\parallel}$ i drugą w kierunku prostopadłym $\alpha_{\perp}$. Jeśli oś cząsteczki wybierzemy jako kierunek x , to $\alpha_{xx} = \alpha_{\parallel}$, $\alpha_{yy} = \alpha_{zz} = \alpha_{\perp}$. Nasza macierz w układzie współrzędnych odpowiadającym osiom elipsoidy polaryzowalności przyjmuje wtedy postać:

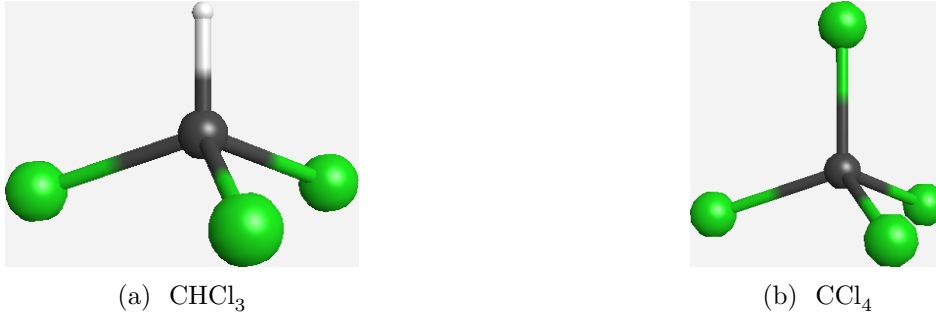
$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\perp} \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Widzimy więc, że w tym przypadku wektor pola w równaniu (55b) jest już wektorem własnym tensora polaryzowalności z wartością własną $\alpha_{\perp}$, $\vec{\mu}_{\text{ind}} = \alpha_{\perp} \vec{E}$. Ponieważ wartości własne dla kierunków x i y są takie same, to każdy wektor leżący w płaszczyźnie xy naszego molekularnego układu współrzędnych jest wektorem własnym. Oznacza to, że każdy układ współrzędnych, którego jedna oś jest w kierunku osi cząsteczki jest układem odpowiadającym osiom elipsoidy. To, co przed chwilą zaobserwowaliśmy wynika z symetrii naszej cząsteczki. Jeśli obrócimy ją wokół jej osi o dowolny kąt, to będzie wyglądała tak samo. Można też pokazać, że w przypadku cząsteczki chloroformu (CHCl_3 , rys. 6a) mamy również 2 różne wartości własne tensora polaryzowalności, jedną, $\alpha_{\parallel}$, odpowiadającą kierunkowi wiązania C–H i drugą, $\alpha_{\perp}$, w płaszczyźnie prostopadłej do tego wiązania.

Zastanówmy się teraz nad przypadkiem cząsteczki o izotropowej polaryzowalności, jak np. czterochlorek węgla (CCl_4 , rys. 6b). Mamy tutaj tylko jedną wartość własną tensora polaryzowalności $\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = \alpha_{zz} = \alpha$, a tensor $\hat{\alpha}$ przyjmuje postać:

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha \hat{I}. \quad (58)$$

Widzimy więc, że w takim przypadku tensor możemy reprezentować przez wartość własną α przemnożoną przez macierz jednostkową $\hat{I}$. Ponieważ dowolny wektor po przemnożeniu przez macierz jednostkową daje ten sam wektor, każdy wektor przemnożony przez macierz izotropowego tensora $\hat{\alpha}$ da ten sam wektor przemnożony przez skalar α . Oznacza to, że każdy wektor jest wektorem własnym dla tej macierzy. Tak więc dla izotropowej polaryzowalności wektor indukowanego momentu dipolowego $\vec{\mu}_{\text{ind}} = \alpha \vec{E}$ jest zawsze równoległy do przyłożonego pola.



Rysunek 6: Cząsteczki (a) chloroformu i (b) czterochlorku węgla.

2.5 Podatność elektryczna ośrodka, a polaryzowalności cząsteczek

Moment dipolowy cząsteczki jest **parametrem mikroskopowym**, zaś jego **makroskopowym** odpowiednikiem jest **polaryzacja ośrodka**. **Wektor polaryzacji ośrodka** ($\vec{P}$) jest to średni sumaryczny moment dipolowy przypadający na jednostkę objętości ośrodka. Możemy zapisać, że dla objętości V mamy:

$$\vec{P} = \frac{\sum_a \vec{\mu}_a}{V} = \frac{\sum_a \vec{\mu}_{0,a}}{V} + \frac{\sum_a \vec{\mu}_{\text{ind},a}}{V}, \quad (59)$$

gdzie a numeruje cząsteczki w objętości V , $\vec{\mu}_a$, $\vec{\mu}_{0,a}$, $\vec{\mu}_{\text{ind},a}$ – odpowiednio całkowity, trwały i indukowany moment dipolowy a -tej cząsteczki. Widzimy więc, że jeśli wektor polaryzacji pomnożymy przez objętość ośrodka, to dostaniemy całkowity moment dipolowy tego ośrodka, będący sumą wektorów momentu dipolowego jego cząsteczek.

Uwaga: Polaryzacji ośrodka nie należy mylić z polaryzacją światła, ani z polaryzowalnością cząsteczek!

W przypadku momentów dipolowych wyróżniamy moment dipolowy trwały i indukowany. Podobnie jest w przypadku polaryzacji ośrodka, przy czym trwała polaryzacja występuje dość rzadko. Przykładem substancji o trwałej polaryzacji są elektrety. Jedną z metod uzyskiwania elektrytów jest przyłożenie pola elektrycznego do roztopionego ośrodka, w celu wywołania częściowej orientacji momentów dipolowych cząsteczek, a następnie schłodzenie go poniżej temperatury krzepnięcia przed wyłączeniem pola.

W naszym przypadku interesuje nas tylko polaryzacja zależna od przyłożonego pola elektrycznego:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \hat{\chi} \vec{E}, \quad (60)$$

gdzie $\hat{\chi}$ jest **tensorem podatności elektrycznej**. Jest to związek analogiczny do zależności indukowanego momentu dipolowego od pola (patrz równ. (50)). Gdy pole to jest statyczne, bądź wolnozmiennie, możemy wyróżnić 3 rodzaje polaryzacji:

- polaryzację orientacyjną – wynikającą z częściowego zorientowania przez pole elektryczne trwałych momentów dipolowych cząsteczek,
- polaryzację atomową – wynikającą z deformacji geometrii cząsteczek pod wpływem pola elektrycznego,
- polaryzację elektronową – wynikającą z przesunięcia chmury elektronowej cząsteczek przez pole elektryczne.

Jeśli pole jest szybkozmiennie (np. składowa elektryczna fali elektromagnetycznej dla światła widzialnego), to bezwładność atomów powoduje, że tylko elektrony nadążają za szybkimi zmianami pola. W takiej sytuacji w równaniu (59) pierwszy człon po prawej stronie się zeruje:

$$\vec{P}(\omega) = \frac{\sum_a \vec{\mu}_{\text{ind},a}}{V} = \frac{\sum_a \hat{\alpha}_a}{V} \cdot \vec{E}(\omega), \quad (61)$$

gdzie ω to częstość kołowa fali elektromagnetycznej. Na podstawie powyższego równania widzimy, że oscylujące pole elektryczne o częstości ω indukuje w ośrodku drgającą polaryzację o tej samej częstości. Polaryzacja ta to drgający makroskopowy moment dipolowy, a więc jest ona źródłem fali

elektromagnetycznej o częstotliwości ω , która to też powoduje polaryzację ośrodka itd. Można pokazać (dowód jest przedstawiony w ramce 2.3), że z połączenia fali oryginalnej i fal emitowanych przez polaryzację otrzymujemy wypadkową falę, która porusza się wolniej w ośrodku, co jest opisywane przez współczynnik załamania.

2.3 Więcej informacji

Współczynnik załamania a polaryzacja ośrodka

Przekształćmy równanie falowe dla ośrodka izotropowego (patrz równania (1a) i (24)) w następujący sposób:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (62)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\chi + 1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (63)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi \vec{E}}{\partial t^2} \quad (64)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (65)$$

Widzimy, że po lewej stronie otrzymaliśmy wyrażenie, jak dla próżni (por. równ 25). Możemy więc zapisać, że rozwiązanie naszego równania falowego w ośrodku, to suma rozwiązania dla próżni $\vec{E}_{\text{vac}}$ i pola $\vec{E}_{\text{pol}}$ wytworzonego przez wyindukowaną w ośrodku polaryzację. Po podstawieniu $\vec{E} = \vec{E}_{\text{vac}} + \vec{E}_{\text{pol}}$ do powyższego równania, możemy je rozbić na dwie składowe:

$$\nabla^2 \vec{E}_{\text{vac}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_{\text{vac}}}{\partial t^2} = 0 \quad (66)$$

$$\nabla^2 \vec{E}_{\text{pol}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_{\text{pol}}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}, \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi \left(\vec{E}_{\text{vac}} + \vec{E}_{\text{pol}} \right). \quad (67)$$

Widzimy więc, że polaryzacja jest indukowana również przez pole wytwarzane przez drgający wektor polaryzacji.

W ośrodku optycznie anizotropowym wartość współczynnika załamania zależy od kierunku polaryzacji światła. We wzorze (29) został pokazany związek pomiędzy współczynnikiem załamania n , a względną przenikalnością elektryczną ośrodka ϵ dla ośrodka izotropowego. W ośrodku optycznie anizotropowym, zarówno względna przenikalność elektryczna, jak i podatność elektryczna są tensorami i są one związane poniższym wzorem (patrz też ramka 2.4):

$$\hat{\epsilon} = \hat{I} + \hat{\chi}. \quad (68)$$

Podobnie, jak to było w przypadku cząsteczki i jej polaryzowalności, również dla naszego ośrodka możemy znaleźć układ współrzędnych, zdefiniowany przez wektory własne, w którym macierz tensora $\hat{\epsilon}$, a więc również macierz tensora $\hat{\chi}$ są diagonalne. Wtedy to na diagonalu macierzy tensora $\hat{\epsilon}$ otrzymujemy jego wartości własne, które to odpowiadają kwadratowi współczynników załamania w ośrodku dla światła spolaryzowanego w kierunku x , y , bądź z :

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \chi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \chi_{zz} \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Oczywiście, gdy wszystkie wartości własne są równe, mamy do czynienia z ośrodkiem optycznie izotropowym. Gdy mamy 2 lub 3 różne wartości własne, mamy do czynienia z **ośrodkiem dwójłomnym**, odpowiednio **jednoosiowym** lub **dwuosiowym**.

Łącząc równanie (61) z równaniem (60) otrzymujemy związek pomiędzy podatnością elektryczną, a więc **parametrem makroskopowym**, a polaryzowalnościami cząsteczek, a więc **parametrami mikroskopowymi**:

$$\hat{\chi} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sum_a \hat{\alpha}_a}{V}. \quad (70)$$

Należy mieć na uwadze, że polaryzowalności w powyższą wzorze to nie są polaryzowalności izolowanych cząsteczek, lecz tzw. polaryzowalności efektywne, uwzględniające efekt oddziaływań pomiędzy cząsteczkami (np. moment dipolowy wyindukowany na jednej cząsteczce przez pole zewnętrzne wytwarza pole, które wpływa na moment dipolowy indukowany na innej cząsteczce). Równania (70) i (69) pokazują związek pomiędzy polaryzowalnościami cząsteczek, a współczynnikami załamania w ośrodku.

2.4 Więcej informacji

Zależność tensorów względnej przenikalności elektrycznej i podatności elektrycznej

Zależność (68) można otrzymać wychodząc z klasycznego wzoru łączącego ze sobą wektory polaryzacji ośrodka, przyłożonego pola i **indukcji elektrycznej** ($\vec{D}$).

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \hat{\epsilon} \vec{E} \quad (71)$$

$$\epsilon_0 \hat{\epsilon} \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (72)$$

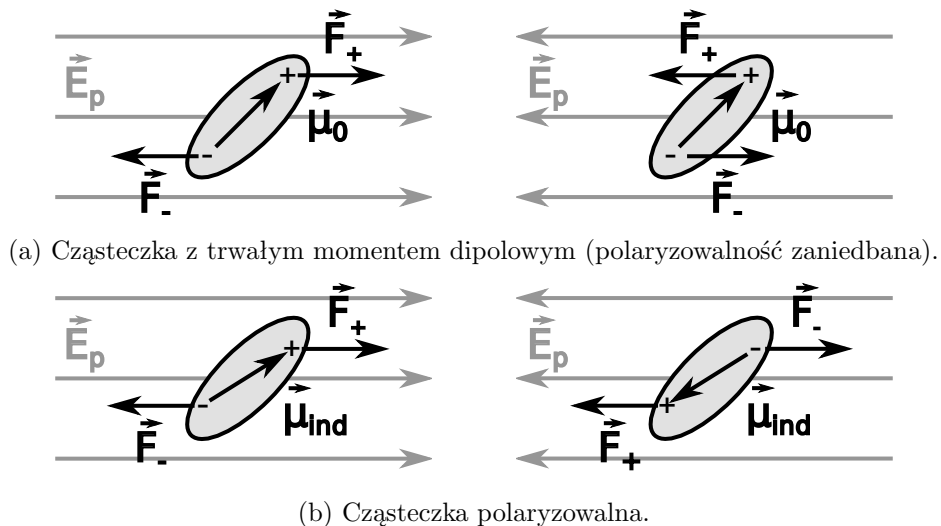
$$\vec{P} = \epsilon_0 (\hat{\epsilon} - \hat{I}) \vec{E} \quad (73)$$

Porównując ostatnie równanie z równaniem (60), otrzymujemy:

$$\hat{\epsilon} - \hat{I} = \hat{\chi} \quad (74)$$

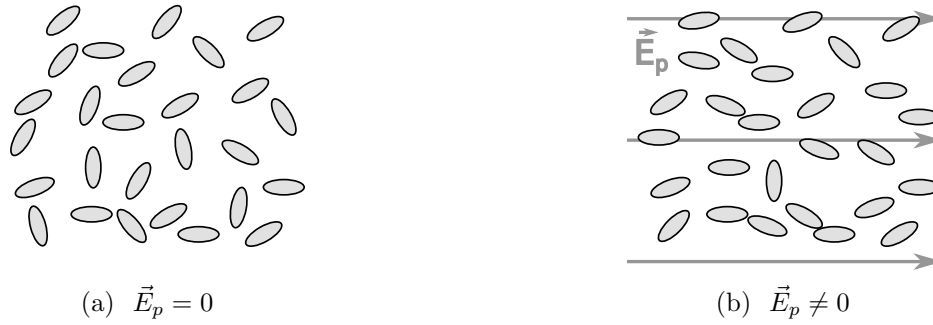
2.6 Dwójłomność indukowana polem elektrycznym - efekt Kerra

2.6.1 Cząsteczki pod wpływem jednorodnego stałego pola elektrycznego



Rysunek 7: Wpływ pola elektrycznego na cząsteczkę z momentem dipolowym trwałym (a) i na cząsteczkę polaryzowalną (b). Rysunki po lewej i po prawej odpowiadają przeciwnym zwrotom wektora pola elektrycznego.

Rozważmy przypadek cząsteczki dipolowej z momentem dipolowym reprezentowanym przez 2 ładunki o przeciwnych znakach, rozsuniętych na pewną odległość. W obecności jednorodnego pola elektrycznego, na oba ładunki działają siły $\vec{F}_+ = q\vec{E}$ i $\vec{F}_- = -q\vec{E}$ (patrz rys. 7a). Ponieważ obie siły są równe co do długości i przeciwnie skierowane, wypadkowa siła działająca na cząsteczkę wynosi 0,



Rysunek 8: Orientacja cząsteczek (a) przy braku i (b) w obecności pola elektrycznego.

a więc pole nie powoduje przesuwania się cząsteczki. Działające siły mogą jednak spowodować obrót cząsteczki. Dla uproszczenia założymy, że środek masy cząsteczki znajduje się w połowie odległości między ładunkami, która wynosi d . Nasz moment dipolowy dany jest wzorem $\vec{\mu}_0 = q\vec{d}$, gdzie wektor $\vec{d}$ jest skierowany tak samo jak moment dipolowy i dla uproszczenia nie został zaznaczony na rysunku. Możemy zapisać wzór na moment siły działający na cząsteczkę jako sumę momentów sił:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_+ + \vec{\tau}_- = \frac{1}{2}\vec{d} \times \vec{F}_+ + \left(-\frac{1}{2}\vec{d}\right) \times \vec{F}_- \quad (75)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{d} \times (q\vec{E}) + \left(-\frac{1}{2}\vec{d}\right) \times (-q\vec{E}) \quad (76)$$

$$= q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{\mu} \times \vec{E}. \quad (77)$$

Moment siły dąży do ustawienia cząsteczki zgodnie z kierunkiem pola elektrycznego, a więc kierunkiem odpowiadającym minimum energii potencjalnej, danej wzorem:

$$\mathcal{E}_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}. \quad (78)$$

Gdyby taka cząsteczka znajdowała się w próżni, to zaczęłaby wykonywać oscylacje orientacyjne wokół położenia równowagi. Proszę sobie przypomnieć ćwiczenie z wahadłem fizycznym! Cząsteczka znajdująca się w cieczy nie wykonuje takich drgań ze względu na silne oddziaływanie z sąsiednimi cząsteczkami. Nie oznacza to jednak też, że wszystkie cząsteczki ustawiają się zgodnie z polem. Jeśli spojrzymy na oddziaływania cząsteczek w kontekście ich zderzeń, to widzimy, że nie tylko zakłócają one możliwość wykonywania oscylacji, ale również wybijają cząsteczki z położenia równowagi. W efekcie uzyskujemy sytuację, w której orientacja wszystkich cząsteczek fluktuuje, jednak chwilowa orientacja cząsteczki w kierunku, w którym przyłożono pole, występuje z większym prawdopodobieństwem niż pod nieobecność pola. Mówimy wtedy, że mamy do czynienia z częściową orientacją cząsteczek. Zostało to zobrazowane na rys. 8.

Jak wiemy, w cząsteczce znajdującej się w polu elektrycznym, niezależnie od obecności trwałego momentu dipolowego, pojawia się również indukowany moment dipolowy, dany wzorem (50). Oczywiście, jeśli nie jest on równoległy do przyłożonego pola, to również działa nań moment siły:

$$\vec{\tau} = (\hat{\alpha}\vec{E}) \times \vec{E}. \quad (79)$$

Na rysunku 7b owal cząsteczki reprezentuje także elipsoidę polaryzowalności. W przedstawionej geometrii moment dipolowy indukowany nie jest równoległy do pola, a więc mamy niezerowy moment siły. Należy pamiętać, że energia indukowanego momentu dipolowego w polu elektrycznym dana jest nieco innym wzorem niż w przypadku trwałego momentu dipolowego (różnica wynika z energii potrzebnej na wyindukowanie momentu dipolowego przez pole):

$$\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2}(\hat{\alpha}\vec{E}) \cdot \vec{E}. \quad (80)$$

Warto jeszcze zwrócić uwagę, że indukowanie momentu dipolowego jest związane nie tylko z przemieszczeniem chmury elektronowej, ale też z deformacją szkieletu cząsteczki, a więc z przemieszczeniem jąder.

Deformacja chmury elektronowej i geometrii cząsteczek przez pole, jak również orientowanie cząsteczek o anizotropowej polaryzowalności jest źródłem anizotropii ośrodka, a więc w ten sposób można wywołać **dwójłomność**, którą badamy w elektro-optycznym efekcie Kerra. Wynika to z równania (70). Warto tu nadmienić, że dwójłomność można wywołać nawet w próbce zawierającej cząsteczki o izotropowej polaryzowalności, jak CCl_4 . Wynika to z faktu, że po odkształceniu chmury elektronowej i szkieletu cząsteczki przez pole, jej polaryzowalność "widziana" przez przechodzącą przez ośrodek wiązkę lasera nie jest już izotropowa.

2.5 Więcej informacji

Cząsteczki pod wpływem zmiennego pola elektrycznego

W momencie, gdy nasze pole elektryczne oscyluje, moment siły działający na cząsteczki będzie również oscylował. W przypadku trwałych momentów dipolowych będzie on zmieniał zwrot w trakcie oscylacji, natomiast w przypadku indukowanych momentów dipolowych długość momentu siły oscyluje z dwukrotnie wyższą częstotliwością niż pole, lecz jego zwrot się nie zmienia. Wynika to z faktu, że zwrot momentu dipolowego indukowanego zmienia się wraz ze zmianą zwrotu pola, co w efekcie zapobiega zmianie zwrotu momentu siły. Oznacza to, że oscylujące pole elektryczne przy każdej zmianie zwrotu zmienia wymuszany kierunek obrotu cząsteczki, gdy rozważamy trwały moment dipolowy, ale nie zmienia go, gdy rozważamy polaryzowalność. Przy odpowiednio dużej częstotliwości oscylacji pola trwałe momenty dipolowe przestają mieć wpływ na orientację cząsteczek, gdyż cząsteczki nie nadążają za zbyt szybkimi zmianami zwrotu momentu siły. Cząsteczki wciąż mogą jednak ulec orientacji ze względu na indukowane momenty dipolowe. Jednak w przypadku tego typu orientacji trwałe momenty dipolowe cząsteczek zsumują się do zera. Wynika to z faktu, że gdy cząsteczkę obrócimy o 180° stopni, nie wpłynie to na kierunek i zwrot indukowanego momentu dipolowego w przestrzeni, a więc odpowiadające mu zwrot momentu siły i wartość energii potencjalnej nie ulegną zmianie. W związku z tym dla danego kierunku trwałego momentu dipolowego takiej cząsteczki, oba jego możliwe zwroty są jednakowo prawdopodobne. Widzimy więc, że dla wysokich częstotliwości oscylacji pola w równaniu 59 można pominąć człon związany z trwałymi momentami dipolowymi. Efekt orientowania się indukowanych momentów dipolowych pod wpływem pola elektrycznego impulsu laserowego jest wykorzystywany w femtosekundowym optyczno-optycznym efekcie Kerra, który to pozwala na obserwację ewolucji orientacji cząsteczek w czasie.

2.6.2 Elektro-optyczny efekt Kerra

Przy naszych rozważaniach wygodnie będzie stosować zapis wzorów przez składowe wektorów i tensorów.

W tym celu rozpisujemy równanie (60):

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (81)$$

Wykonując mnożenie macierzy przez wektor otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{xx}E_x + \chi_{xy}E_y + \chi_{xz}E_z \\ \chi_{yx}E_x + \chi_{yy}E_y + \chi_{yz}E_z \\ \chi_{zx}E_x + \chi_{zy}E_y + \chi_{zz}E_z \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Możemy więc zapisać wzór na i -tą składową polaryzacji:

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j, \quad (83)$$

gdzie indeks j przyjmuje wartości x , y i z .

W przypadku dużych wartości natężenia pola elektrycznego, uwidacznia się zależność tensora $\hat{\chi}$ od pola. Zależność tą uwzględnia się poprzez rozwinięcie $\hat{\chi}$ w szereg Maclaurina względem pola $\vec{E}$. Jako wynik takiego rozwinięcia otrzymujemy następującą postać elementów tensora $\hat{\chi}$:

$$\chi_{ij} = \chi_{ij}^{(1)} + \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_k + \sum_{kl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_k E_l + \dots \quad (84)$$

Jak widać każdy kolejny człon rozwinięcia ma jeden dodatkowy indeks po którym sumujemy i jedno dodatkowe mnożenie przez pole. Występujące w rozwinięciu Maclaurina człony $\frac{1}{n!}$ są włączone do $\hat{\chi}^{(n+1)}$. W efekcie wzór na polaryzację ośrodka możemy zapisać jako:

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \left(\chi_{ij}^{(1)} + \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_k + \sum_{kl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_k E_l + \dots \right) E_j. \quad (85)$$

lub też po wymnożeniu:

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j + \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \quad (86)$$

$\chi_{ij}^{(1)}$ jest elementem tensora $\hat{\chi}^{(1)}$, opisującego liniową podatność elektryczną, a więc niezależną od pola i skutkującą polaryzacją ośrodka liniowo zależną od pola. $\chi_{ijk}^{(2)}$ i $\chi_{ijkl}^{(3)}$ to odpowiednio elementy tensorów $\hat{\chi}^{(2)}$ i $\hat{\chi}^{(3)}$, opisujących nieliniową podatność elektryczną odpowiednio 2 i 3 rzędu. Człony nieliniowe uwidaczniają się dopiero przy odpowiednio silnych polach. Warto zwrócić uwagę na rosnącą liczbę indeksów przy podatnościach kolejnych rzędów. Podatność 1 rzędu ma 2 indeksy, więc można ją reprezentować przez tablicę 2-wymiarową, a więc macierz. W przypadku podatności 2 rzędu mamy o jeden wymiar więcej, a więc potrzebna jest tablica 3-wymiarowa itd.

Równania (84), (85) i (86) są bardzo ogólne. W naszym przypadku zastosujemy kilka uproszczeń. Badane przez nas próbki są izotropowe, tzn. ich właściwości są identyczne niezależnie od kierunku. W takiej sytuacji zmiana zwrotu pola elektrycznego powinna skutkować zmianą zwrotu wektora polaryzacji. Zmiana zwrotu pola spowoduje, że wszystkie jego składowe E_x , E_y i E_z zmienią znak. W związku z tym znak zmienią wyrażenia z nieparzystym rzędem podatności elektrycznej, zaś wyrażenia z parzystym rzędem znaku nie zmienią. Ponieważ polaryzacja ma również zmienić zwrot, wszystkie człony parzyste muszą być równe 0:

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j + \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots = \sum_j \left(\chi_{ij}^{(1)} + \sum_{kl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_k E_l + \dots \right) E_j. \quad (87)$$

Bierzemy pod uwagę tylko pierwszy człon nieliniowy:

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \left(\chi_{ij}^{(1)} + \sum_{kl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_k E_l \right) E_j. \quad (88)$$

Zakładamy, że mamy do czynienia z bardzo silnym statycznym polem elektrycznym $\vec{E}_p$, które modyfikuje podatność elektryczną ośrodka i jest skierowane w kierunku x :

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \left(\chi_{ij}^{(1)} + \chi_{ijxx}^{(3)} E_p^2 \right) E_j. \quad (89)$$

Nasz ośrodek pod nieobecność silnego statycznego pola jest izotropowy, a więc:

$$\hat{\chi}^{(1)} = \begin{bmatrix} \chi^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \chi^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \chi^{(1)} \end{bmatrix} = \chi^{(1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (90)$$

Ponadto w ośrodku izotropowym niezerowe są tylko elementy tensora $\hat{\chi}^{(3)}$, dla których każdy indeks występuje parzyście, czyli np. $\chi_{yzxx}^{(3)} = 0$, ale $\chi_{yyxx}^{(3)} \neq 0$. Nasze równanie upraszcza się do postaci:

$$P_i = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} + \chi_{iixx}^{(3)} E_p^2 \right) E_i, \quad (91)$$

lub macierzowo:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi^{(1)} + \chi_{xxxx}^{(3)} E_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & \chi^{(1)} + \chi_{yyxx}^{(3)} E_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^{(1)} + \chi_{zzxx}^{(3)} E_p^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (92)$$

W ośrodku izotropowym $\chi_{yyxx}^{(3)} = \chi_{zzxx}^{(3)}$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi^{(1)} + \chi_{xxxx}^{(3)} E_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & \chi^{(1)} + \chi_{yyxx}^{(3)} E_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^{(1)} + \chi_{yyxx}^{(3)} E_p^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (93)$$

Możemy więc zapisać macierz tensora $\hat{\epsilon}$ w poniższej postaci:

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{\parallel}^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_{\perp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_{\perp}^2 \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \chi^{(1)} + \chi_{xxxx}^{(3)} E_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \chi^{(1)} + \chi_{yyxx}^{(3)} E_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \chi^{(1)} + \chi_{yyxx}^{(3)} E_p^2 \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Widzimy, że otrzymaliśmy ośrodek dwójłomny jednoosiowy, z osią optyczną w kierunku x , a więc w kierunku przyłożonego silnego pola statycznego. Mamy 2 współczynniki załamania odpowiadające kierunkom równoległemu i prostopadłemu do kierunku przyłożonego pola statycznego. Możemy je zapisać w następującej postaci:

$$n_{\parallel} = \sqrt{1 + \chi^{(1)} + \chi_{xxxx}^{(3)} E_p^2} \approx n_0 + \frac{1}{2n_0} \chi_{xxxx}^{(3)} E_p^2 \quad (96)$$

$$n_{\perp} = \sqrt{1 + \chi^{(1)} + \chi_{yyxx}^{(3)} E_p^2} \approx n_0 + \frac{1}{2n_0} \chi_{yyxx}^{(3)} E_p^2. \quad (97)$$

W powyższym został uwzględniono fakt, że zaburzenie podatności elektrycznej, wywołane silnym polem elektrycznym, $(\chi_{xxxx}^{(3)} E_p^2)$ jest bardzo małe. Dlatego wykorzystano rozwinięcie w szereg Maclaurina:

$$\sqrt{a+x} = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}x + \dots, \quad (98)$$

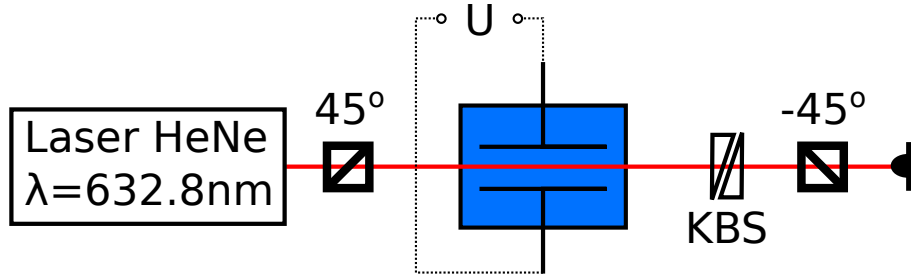
gdzie $a = 1 + \chi^{(1)}$, $x = \chi_{xxxx}^{(3)} E_p^2$. $n_0 = \sqrt{1 + \chi^{(1)}}$ jest współczynnikiem załamania dla ośrodka niezaburzonego. Możemy teraz zapisać wzór opisujący dwójłomność ośrodka:

$$\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp} = \frac{1}{2n_0} \left(\chi_{xxxx}^{(3)} - \chi_{yyxx}^{(3)} \right) E_p^2. \quad (99)$$

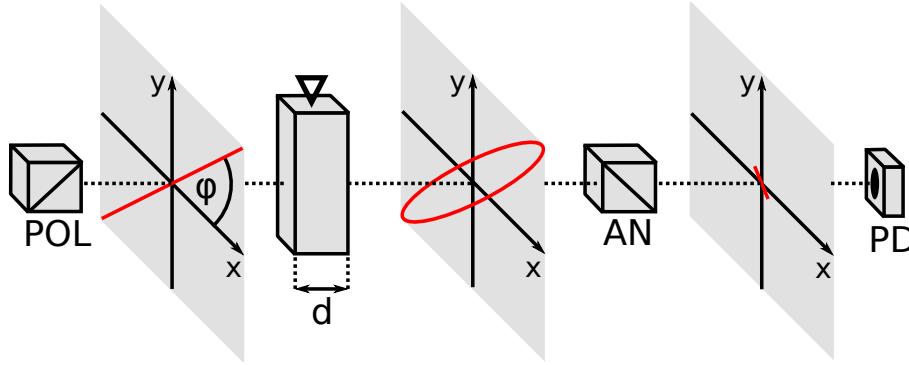
Otrzymaliśmy więc dwójłomność ośrodka wywołaną przez statyczne pole elektryczne. Zjawisko to nazywamy **elektro-optycznym efektem Kerra**.

2.6.3 Pomiar indukowanej dwójłomności

Schemat układu pomiarowego został przedstawiony na rys. 9. Dwójłomność jest indukowana w ośrodku za pomocą pola elektrycznego w kondensatorze płaskim, do którego okładki przyłożono różnicę potencjałów U . Dwójłomność jest badana za pomocą wiązki laserowej, zwanej **sondującą**. Próbka znajduje się pomiędzy **skrzyżowanymi polaryzatorami**, a więc przepuszczającymi prostopadłe do siebie polaryzacje. Oznacza to, że jeśli pomiędzy polaryzatorami nie dojdzie do zmiany polaryzacji promieniowania laserowego, to do fotodiody za ostatnim polaryzatorem nic nie dojdzie. Za kondensatorem umieszczony jest kompensator Babineta-Soleila, którego zadaniem jest skasowanie dwójłomności niezwiązanej z badanym efektem, czyli np. wywołanej naprężeniami w okienkach kondensatora. Tak więc przy braku napięcia na okładkach kondensatora sygnał powinien wynosić zero.



Rysunek 9: Schemat układu do pomiaru elektro-optycznego efektu Kerra, gdzie polaryzator i analizator są ustawione odpowiednio pod kątami 45° i -45° względem kierunku pola w kondensatorze. Na niebiesko zaznaczono próbkę w kondensatorze, zaś KBP oznacza kompensator Babineta-Soleila.



Rysunek 10: Zmiana polaryzacji z liniowej na eliptyczną przy przejściu przez próbkę wykazującą dwójłomność, gdzie x i y odpowiadają kierunkom o współczynnikach załamania $n_{||}$ oraz $n_{\perp}$, POL – polaryzator, AN – analizator, PD – fotodioda. Na rysunku nie zaznaczono statycznego pola wywołującego dwójłomność, które jest skierowane w kierunku x .

Na rys. 10 został przedstawiony schemat pokazujący zmianę polaryzacji światła w układzie. Pierwszy polaryzator ustala kierunek polaryzacji wiązki sondującej przed wejściem do próbki. Jeśli przechodząca przez ośrodek fala elektromagnetyczna ma składowe polaryzacji w kierunkach odpowiadających $n_{||}$ oraz $n_{\perp}$, składowe te ulegają przesunięciu w fazie w trakcie propagacji. Przesunięcie to powoduje w ogólnym przypadku zmianę polaryzacji wiązki sondującej z liniowej na eliptyczną. Polaryzacja eliptyczna posiada niezerową składową w kierunku prostopadłym do kierunku wejściowej polaryzacji liniowej. Składowa ta jest przepuszczana przez końcowy polaryzator (analizator), a jej wielkość zależy od wielkości dwójłomności próbki.

Sformalizujmy teraz to, co zostało wyżej powiedziane. Na wejściu do próbki składową elektryczną fali elektromagnetycznej spolaryzowanej liniowo w płaszczyźnie xy , a więc rozchodzącej się w kierunku z , zapisujemy wzorem (31), który tu powtarzamy:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_0 z_0)}. \quad (100)$$

Jej składowe polaryzacji w kierunkach odpowiadających różnym współczynnikom załamania możemy zapisać dla pozycji na wejściu do próbki (z_0) w postaci (patrz rys. 10):

$$E_x = E_0 \cos \phi e^{i(\omega t - k_0 z_0)} \quad (101a)$$

$$E_y = E_0 \sin \phi e^{i(\omega t - k_0 z_0)}, \quad (101b)$$

gdzie $k_0 = \frac{\omega}{c}$, natomiast ϕ jest kątem pomiędzy kierunkiem polaryzacji wiązki próbującej i kierunkiem osi x . Po przejściu przez próbkę o grubości d te składowe przyjmują postać:

$$E_x = E_0 \cos \phi e^{i(\omega t - k_0 z_0 - n_{||} k_0 d)} \quad (102a)$$

$$E_y = E_0 \sin \phi e^{i(\omega t - k_0 z_0 - n_{\perp} k_0 d)}. \quad (102b)$$

Powstałe przesunięcie fazowe pomiędzy składowymi pola wiązki próbującej E_x i E_y powoduje zmianę jej polaryzacji z liniowej na eliptyczną, co zostało pokazane na rys. 10. W efekcie pojawia się składowa

pola (E_t) w kierunku prostopadłym do kierunku polaryzacji pola wejściowego. Możemy ją znaleźć sumując rzuty składowych E_x i E_y na ten kierunek:

$$E_t = E_y \cos \phi + E_x \cos(90^\circ + \phi) = E_y \cos \phi - E_x \sin \phi \quad (103)$$

$$= E_0 \sin \phi \cos \phi e^{i(\omega t - k_0 z_0 - n_\perp k_0 d)} - E_0 \sin \phi \cos \phi e^{i(\omega t - k_0 z_0 - n_\parallel k_0 d)} \quad (104)$$

$$= \frac{1}{2} E_0 \sin(2\phi) e^{i(\omega t - k_0 z_0 - n_\parallel k_0 d)} [e^{i\Delta n k_0 d} - 1], \quad (105)$$

gdzie $\Delta n = n_\parallel - n_\perp$ oraz skorzystaliśmy z faktu, że $\sin 2\phi = 2 \sin \phi \cos \phi$. Składowa E_t zostanie przepuszczona przez końcowy polaryzator (analyzer). Za analizatorem znajduje się fotodiody, która dla padającego nań promieniowania daje sygnał proporcjonalny do jego natężenia I_t . Natężenie promieniowania jest związane z kwadratem amplitudy drgań natężenia pola elektrycznego. Przy omawianiu reprezentacji drgań w postaci zespolonej (8a), podano, że amplitudę uzyskuje się jako moduł. Tak więc sygnał z naszej fotodiody przyjmuje postać:

$$S \propto I_t = \frac{c\epsilon_0}{2} |E_t|^2 = \frac{c\epsilon_0}{2} \frac{1}{2} |E_0|^2 \sin^2(2\phi) [1 - \cos(\Delta n k_0 d)]. \quad (106)$$

Jak widać, uzyskany sygnał ma największą amplitudę, gdy kąt pomiędzy kierunkiem pola indukującego dwójłomność i kierunkiem polaryzacji wiązki próbującej wynosi $\phi = 45^\circ$. Ponieważ zazwyczaj wyindukowana dwójłomność jest mała, $\Delta n \ll \frac{\pi}{k_0 d}$, możemy za cosinus podstawić pierwsze dwa człony jego rozwinięcia w szereg Maclaurina:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \dots \quad (107)$$

$$S \propto \frac{c\epsilon_0}{2} \frac{1}{4} |E_0|^2 (\Delta n k_0 d)^2. \quad (108)$$

Z równ. (108) wynika, że otrzymany sygnał jest zależny od kwadratu różnicy współczynników załamania. Gdyby w próbce nie było dwójłomności, zaś analyzer był ustawiony równolegle do pierwszego polaryzatora, to otrzymalibyśmy na fotodiodzie sygnał odpowiadający natężeniu wiązki sondującej przed próbką, dany wzorem:

$$S_0 \propto \frac{c\epsilon_0}{2} |E_0|^2. \quad (109)$$

Można więc zapisać względny sygnał jako:

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{4} (\Delta n k_0 d)^2. \quad (110)$$

Otrzymujemy wtedy wzór na dwójłomność w postaci:

$$\Delta n = 2 \frac{1}{k_0 d} \sqrt{\frac{S}{S_0}} = \frac{\lambda}{\pi d} \sqrt{\frac{S}{S_0}}, \quad (111)$$

gdzie skorzystano z zależności $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$.

W przypadku elektrycznego efektu Kerra definiuje się stałą Kerra B_λ (zależną od długości fali promieniowania próbującego λ):

$$B_\lambda = \frac{1}{\lambda} \frac{\Delta n}{E_p^2}. \quad (112)$$

Uwzględniając równanie (111) oraz fakt, że pole E_p jest wytworzone w kondensatorze płaskim o odległości okładek d_0 , do którego przyłożono napięcie U ($E_p = U/d_0$), otrzymujemy:

$$B_\lambda = \frac{d_0^2}{\pi d U^2} \sqrt{\frac{S}{S_0}}. \quad (113)$$

Na koniec warto wspomnieć, że fotodiody przy dużej wartości natężenia promieniowania ulega wysyceniu. Dlatego też stosuje się filtry osłabiające wiązkę i charakteryzowane przez absorbcję A . Wielkość ta jest zależna od długości fali promieniowania padającego i jest dana wzorem:

$$A = -\log_{10} \frac{I}{I_0}, \quad (114)$$

gdzie I_0 i I to natężenia promieniowania przed i po przejściu przez filtr. Znając absorbcję i natężenie wejściowej wiązki, możemy znaleźć natężenie wiązki za filtrem:

$$I = I_0 \cdot 10^{-A}. \quad (115)$$

3 Wykonanie ćwiczenia

Uwaga: W czasie pomiaru należy unikać oświetlania detektora promieniowaniem o dużej intensywności, a także nie należy dotykać elementów do których jest przyłożone wysokie napięcie.

1. Wyzerować offset fotodiody. W tym celu należy dokładnie zasłonić fotodiodę czarną tekturą, a następnie za pomocą potencjometru ustawić poziom sygnału (obserwowany na oscyloskopie) na 0.
2. Wysunąć kondensator i kompensator z układu, ustawić pierwszy polaryzator, aby przepuszczał polaryzację pod kątem $\approx 45^\circ$ względem powierzchni stołu, a następnie zminimalizować sygnał za drugim polaryzatorem.
3. Dla każdego z dostępnych filtrów wykonać pomiar, pozwalający znaleźć jego absorbancję. W tym celu należy przekręcić analizator do pozycji, w której sygnał na fotodiodzie osiągnie wartość $S_{\text{ref}} = 1 \text{ V}$, a następnie wstawić filtr na wyjściu z lasera i odczytać wysokość sygnału z fotodiody S . Operację powtórzyć kilkukrotnie dla każdego z filtrów.
4. Wypełnić kondensator badaną cieczą, wstawić go do układu i wyrównać, aby wiązka laserowa przechodziła przez środek obszaru pomiędzy okładkami.
5. Wykorzystać kompensator Babineta-Soleila w celu zminimalizowania sygnału na fotodiodzie przy braku przyłożonego napięcia do kondensatora.
6. Stopniowo otwierać analizator, dokładając kolejne filtry na wyjściu lasera w celu zapobieżenia wysyceniu detektora. Kontynuować aż do osiągnięcia położenia maksimum transmisji, a następnie zmierzyć poziom sygnału przy zerowej różnicy potencjałów przyłożonej do okładek kondensatora. Otrzymana wartość jest proporcjonalna do natężenia promieniowania, osłabionego przez wstawione filtry. Pomiar powtórzyć kilkukrotnie.
7. Ponownie skrzyżować polaryzatory, ustawić czas trwania napięcia na kondensatorze na 0.1 ms z okresem 1 ms. Ustawić napięcie na poziomie 500 V i odczekać ok. 5 minut do ustania fluktuacji w sygnale (są one spowodowane obecnością zanieczyszczeń, posiadających niezerowy ładunek elektryczny. Po dotarciu do okładki kondensatora ładunek jest neutralizowany i zanieczyszczenie opada na dno). Ustawić na oscyloskopie kursory w punktach odpowiadających brakowi sygnału i środkowi schodka sygnału, a następnie ustawić pomiar różnicy wartości wskazywanych przez kursory. W celu poprawy precyzji pomiaru włączyć uśrednianie.
8. Zmierzyć poziom sygnału oraz faktyczne napięcie na okładkach kondensatora dla różnych wartości napięcia ustawionych na generatorze. Napięcie na generatorze należy zmieniać w zakresie od 0 V do 2400 V z krokiem 150 V. Należy pilnować, aby wzmocnienie na oscyloskopie było największym, nie powodującym wysycenia sygnału. Należy zapisywać również stosowany zakres pomiarowy (wartość napięcia przypadającą na podziałkę). Jeśli sygnał z fotodiody przekracza 7 V, należy zastosować odpowiedni filtr.
9. Punkty 4. - 8. wykonać dla każdej z badanych cieczy: czterochloroetylen (C_2Cl_4), chloroform (CHCl_3).

4 Opracowanie wyników

1. Wyznaczyć absorbancje A użytych filtrów i odpowiadające im niepewności.
2. Dla każdej badanej próbki znaleźć wartość S_0 , a następnie wykreślić zależność $\sqrt{\frac{S}{S_0}}$ od U^2 . Dla każdego punktu należy zaznaczyć słupki błędów. Błąd dla wartości napięcia U_s odczytanej z oscyloskopu dany jest wzorem:

$$\Delta U_s = \pm(0.03U_s + 0.2U_{\text{div}} + C), \quad (116)$$

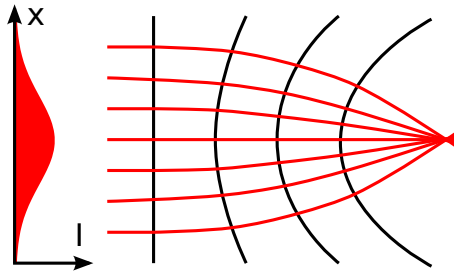
gdzie U_{div} to wartość napięcia na podziałkę oscyloskopu, zaś $C = 2 \text{ mV}$ dla $U_{\text{div}} \leq 200 \text{ mV}$, a dla większych wartości $C = 50 \text{ mV}$. Zgodnie ze wzorem (113) wykreślona zależność powinna mieć postać funkcji liniowej:

$$\sqrt{\frac{S}{S_0}} = \frac{\pi d B_\lambda}{d_0^2} U^2 = a U^2. \quad (117)$$

Należy dopasować funkcję liniową przechodzącą przez początek układu współrzędnych (funkcja LINEST w OpenOffice), a następnie na podstawie uzyskanego parametru a oraz rozmiarów kondensatora wyznaczyć stałą Kerra dla badanej próbki oraz odpowiadającą jej niepewność. Długość kondensatora wynosi $(75.7 \pm 0.05) \text{ mm}$, zaś odległość jego okładek to $(1.25 \pm 0.02) \text{ mm}$.

3. Zebrać w tabeli uzyskane stałe Kerra (podać też dla jakiej długości fali zostały otrzymane), a także wartości różnicy współczynników załamania Δn przy najwyższym użytym napięciu (proszę pamiętać o podaniu niepewności).
4. Porównać otrzymane stałe Kerra z wartościami literaturowymi.
5. Dla każdej z rozważanych cieczy krótko wytłumaczyć jaki jest wpływ stałego pola elektrycznego na cząsteczki, skutkujący dwójłomnością próbki.

5 Ciekawostka: Optyczno-optyczny efekt Kerra



Rysunek 11: Efekt samoogniskowania światła.

Optyczno-optyczny efekt Kerra został zaobserwowany niemal wiek po odkryciu efektu elektrooptycznego, gdy pojawiły się źródła promieniowania laserowego o dostatecznie dużej mocy. W wyniku tego efektu wiązka laserowa może modyfikować współczynnik załamania ośrodka, w którym się propaguje (odpowiedzialne jest za to pole elektryczne fali elektromagnetycznej promieniowania laserowego). Na przykład dla wiązki o gaussowskim rozkładzie natężenia promieniowania w przekroju poprzecznym, przedstawionej na rys. 11, wartość współczynnika załamania jest inna pośrodku wiązki i na jej obrzeżach, ze względu na zależność współczynnika załamania od natężenia promieniowania [patrz równ. (96)]. W przypadku, gdy współczynnik załamania rośnie ze wzrostem natężenia promieniowania ($n_2 > 0$), środek wiązki porusza się wolniej niż jej obrzeża, co powoduje zagięcie się **frontu falowego** (powierzchni stałej fazy) fali elektromagnetycznej. Ponieważ fale rozchodzą się prostopadłe do frontu falowego, dochodzi do **samo-ogniskowania** wiązki laserowej. Jest to **efekt soczewki kerrowskiej**, zilustrowany na rys. 11.

Dla danej średniej mocy promieniowania, efekt ten jest silniejszy w przypadku **impulsów laserowych** (większe chwilowe natężenie promieniowania), co jest wykorzystywane w konstrukcji femtosekundowego lasera szafirowego, zwanego też oscylatorem szafirowym, którego wnętrza zapewnia mniejsze straty w czasie pracy impulsowej niż w czasie pracy ciągłej.

W przypadku bardzo silnych impulsów laserowych samoogniskowanie można zaobserwować nawet w powietrzu. Podczas samoogniskowania zmniejszanie się średnicy wiązki powoduje wzrost natężenia pola elektrycznego, przez co uwidaczniają się efekty wyższych rzędów, co modyfikuje efekt samoogniskowania. Ponadto odpowiednio silne pole elektryczne impulsu laserowego powoduje generację plazmy w ośrodku. Jest to bardzo widowiskowy efekt, który został wykorzystany przy produkcji filmu *A "Star Wars" laser bullet - this is what it really looks like* (<https://www.youtube.com/watch?v=SNTZ7MY2r18>), zrealizowanego w Centrum Laserowym ICHF PAN. Efekt generacji plazmy w powietrzu przez impulsy laserowe można zobaczyć na żywo w laboratorium grupy badawczej InFemto

(<http://femto.chem.uw.edu.pl>) na naszym wydziale. Gdy efekty samoogniskowania i generacji plazmy są niepożądane, impulsy laserowe prowadzi się w rurach próżniowych.

Optyczny efekt Kerra jest również często wykorzystywany w spektroskopii laserowej. Z jednej strony może być on wykorzystany do konstrukcji ultraszybkich migawek sterowanych impulsem laserowym. Na przykład w trakcie femtosekundowych pomiarów fluorescencji, jeden impuls laserowy jest odpowiedzialny za wzbudzenie próbki, drugi zaś impuls, opóźniony w czasie względem pierwszego o τ , otwiera migawkę kerrowską, dzięki czemu do detektora dociera tylko promieniowanie fluorescencji wyemitowane po czasie τ od wzbudzenia (z dokładnością ograniczoną przez czas trwania impulsu sterującego migawką). Z drugiej strony optyczny efekt Kerra może zostać wykorzystany jako niezależna technika spektroskopowa [5], ponieważ w przypadku większości substancji dwójłomność wywołana silnym impulsem laserowym nie znika od razu, lecz wykazuje ewolucję czasową w skali od femtosekund po dziesiątki pikosekund, a w niektórych przypadkach nawet nanosekund. Ewolucja ta jest zależna od drgań własnych i rotacji cząsteczek oraz drgań struktur międzymolekularnych. Dzięki temu można badać oddziaływania międzymolekularne np. poprzez obserwację dynamiki wiązań wodorowych. Z doświadczeniem tym można się zapoznać np. na spektroskopii B na 2 roku studiów.

Przypisy

- [1] J. Kerr, *Phil. Mag*, 1875, **50**, 337–348.
- [2] A. Karolus and O. Mittelstaedt, *Phys. Zeit.*, 1928, **29**, 698–702.
- [3] K. Polok, na podstawie: SuperManu, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Onde_electromagnetique.svg, CC BY-SA 3.0, [2018-04-04].
- [4] K. Polok, na podstawie: Cepheiden, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Glan-Tylor_prism_DE.svg, CC BY-SA 3.0, [2018-04-04].
- [5] K. Polok, W. Gadomski and B. Ratajska-Gadomska, *Rev. Sci. Instrum.*, 2015, **86**, 103109.